



Diferenciador Robusto Exacto y Uniforme

Emmanuel Cruz-Zavala Jaime A. Moreno

Coordinación Eléctrica y Computación,
Instituto de Ingeniería,

Universidad Nacional Autónoma de México,
04510 México D.F., Mexico

Email: emitacz@yahoo.com.mx, JMorenoP@ii.unam.mx

Leonid M. Fridman

División de Ingeniería Eléctrica,
Facultad de Ingeniería,

Universidad Nacional Autónoma de México,
04510 México D.F., Mexico

Email: lfridman@unam.mx

Resumen—En este artículo se presenta un **Diferenciador Robusto Exacto y Uniforme (DREU)**. Los diferenciadores basados en el Algoritmo del Super-Twisting (AST) brindan convergencia exacta y en tiempo finito a la derivada de la señal de entrada, cuando la derivada es Lipschitz. Sin embargo, el tiempo de convergencia de estos diferenciadores crece sin cota con crecimiento de las condiciones iniciales de la derivada. El DREU es una modificación del AST, que incluye términos de alto orden, los cuales proveen convergencia uniforme con respecto a las condiciones iniciales. Por lo tanto, el DREU converge exactamente a la derivada de la señal de entrada y el tiempo de convergencia está uniformemente acotado por una constante. El análisis y diseño del diferenciador está basado en funciones fuertes de Lyapunov.

Palabras clave: Diferenciadores, convergencia exacta, convergencia uniforme, funciones fuertes de Lyapunov.

I. INTRODUCCIÓN

En control, los diferenciadores tienen diversas aplicaciones: son parte importante de los controladores PID clásicos; generalmente, son parte esencial en el control por retroalimentación de salida de sistema no lineales (Atassi, 2000; Levant, 2003); o son utilizados también como observadores. El principal reto en el diseño del diferenciador es mantener tanto la exactitud como la robustez ante el ruido y el muestreo de la señal (Levant, 1993; Levant, 2003). En sistemas lineales, la aproximación de la función de transferencia de un diferenciador en una banda de frecuencia ha sido extensamente utilizada (Rabiner, 1970; Kumar, 1988). Los observadores de alta ganancia también han sido muy utilizados como diferenciadores, y aplicados al control por retroalimentación de salida, dando algunos resultados de separación en esquemas de control no lineal (Atassi, 2000; Khalil, 2002). No obstante, la sensibilidad al ruido es fuertemente amplificada al utilizar ganancias grandes y la presencia del efecto pico deteriora aún más su desempeño (Atassi, 2000; Khalil, 2002).

En contraste, algoritmos discontinuos se han empleado como diferenciadores (Levant, 1998; Bartolini, 2000; Bejarano, 2007; Pisano, 2007). En particular, se ha mostrado que el algoritmo del super-twisting se adapta muy bien como diferenciador (Levant, 2003) ya que ofrece la mejor convergencia posible en presencia de ruido determinístico acotado medible en el sentido de Lebesgue y de la discretización de la señal, cuando la segunda derivada de la señal base es acotada (Levant, 2003). Esta clase de diferenciadores ha

sido utilizada para construir observadores exactos y robustos con convergencia en tiempo finito (Filippov, 1988; Bejarano, 2007). La convergencia en tiempo finito es una propiedad crucial para la estimación de estados en sistema híbridos, o para propiedades de separación de sistemas no lineales. La desventaja los observadores/diferenciadores conocidos es que su tiempo de convergencia tiende a infinito cuando la norma de la condiciones iniciales crece sin cota. Esto significa, que para sistemas híbridos no certeza de que el estimador brinde el valor exacto de los estados antes de que ocurra la siguiente conmutación, si no se conoce una cota de las condiciones iniciales a priori. Para control por retroalimentación de salida basado en un observador de estados, significa que no se puede asegurar que el observador converja antes de que las trayectorias de la planta se escapen a infinito, si una cota de las condiciones iniciales no es dada priori. Esto motiva la importancia de tener observadores/diferenciadores que converjan exacta y robustamente en tiempo finito, con tiempo de convergencia acotado por una constante.

Metodología. Recientemente, funciones fuertes de Lyapunov han sido desarrolladas para el Algoritmo del Super-Twisting (AST) (Polyakov, 2009; Moreno, 2008; Moreno, 2009), permitiendo analizar la robustez del algoritmo para una clase amplia de perturbaciones e incertidumbres. Además, nuevos algoritmos han sido propuestos basados en el AST (ver (Moreno, 2008; Moreno, 2009)), asegurando la convergencia en tiempo finito y las características de robustez mediante funciones de Lyapunov fuertes, y obteniéndose una fórmula para estimar el tiempo de convergencia.

Contribución. El artículo introduce por primera vez la noción de convergencia exacta y uniforme y el diferenciador robusto exacto y uniforme (DREU) es propuesto. El DREU es una modificación del diferenciador presentado en (Levant, 1998), que incluye términos de corrección de alto grado, responsables de la propiedad de convergencia uniforme y del tiempo de convergencia acotado por una constante e independiente de las condiciones iniciales del diferenciador. Además, se proponen dos funciones de Lyapunov que garantizan la convergencia exacta y uniforme del diferenciador. Una de ellas, demuestra las convergencia uniforme (en la condición inicial) de cada trayectoria a un conjunto compacto que contiene al origen. La otra muestra la convergencia exacta al origen de cada trayectoria iniciada

dentro de un conjunto compacto.

El artículo esta estructurado como sigue. En la sección II el DREU es presentado, y en la sección III se presentan los resultados principales. Sección IV presenta las proposiciones empleadas para probar los resultados principales. En la sección V se muestra el algoritmo para estimar el tiempo de convergencia y en la sección VI un ejemplo de simulación es considerado. Finalmente, se presentan algunas conclusiones.

II. ESTABLECIMIENTO DEL PROBLEMA Y RESULTADO PRINCIPAL

Sea la señal de entrada $f(t)$ al diferenciador una función definida de $[0, \infty)$. La función $f(t)$ se asume que es una función Lebesgue-medible y $f(t) = f_0(t) + v(t)$. El primer termino es la señal base $f_0(t)$ (desconocida) que tiene una derivada con constante de Lipschitz conocida $L > 0$. El segundo termino corresponde al ruido $v(t)$ que aparece en la señal $f_0(t)$, el cual es desconocido, pero se asume acotado. La medición discreta de la señal $f(t)$ puede ser interpretada como un ruido que afecta a la señal de entrada. En ausencia de ruido y considerando $\varsigma_0 = f_0(t)$ y $\varsigma_1 = \dot{f}_0(t)$, la representación de la señal en el modelo de estados es

$$\dot{\varsigma}_0 = \varsigma_1, \dot{\varsigma}_1 = \ddot{f}_0. \quad (1)$$

El objetivo es estimar robustamente $\dot{f}_0(t)$ usando solamente la medición de $f_0(t)$, en tiempo preescrito. Para diferenciar la señal de entrada desconocida, considere la siguiente ecuación auxiliar $\dot{x} = \dot{z}_0$, donde \dot{z}_0 es la salida del diferenciador propuesto. Sea $\sigma_0 = z_0 - \varsigma_0$ el error de estimación entre la señal base y la integral de la salida del diferenciador, aplicando el Algoritmo del Super-Twisting Generalizado (ASTG) modificado, se obtiene el siguiente esquema del DREU

$$\dot{z}_0 = -k_1\phi_1(\sigma_0) + z_1, \dot{z}_1 = -k_2\phi_2(\sigma_0), \quad (2)$$

k_1 y k_2 son ganancias positivas que se diseñan apropiadamente,

$$\phi_1(\sigma_0) = \mu_1 |\sigma_0|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_0) + \mu_2 |\sigma_0|^{\frac{3}{2}} \text{sign}(\sigma_0),$$

$$\phi_2(\sigma_0) = \frac{\mu_1^2}{2} \text{sign}(\sigma_0) + 2\mu_1\mu_2\sigma_0 + \frac{3}{2}\mu_2^2 |\sigma_0|^2 \text{sign}(\sigma_0),$$

$\mu_1, \mu_2 \geq 0$ son escalares. Cuando $\mu_1 = 1$ y $\mu_2 = 0$, el diferenciador robusto propuesto en (Levant, 1993) es recuperado. El diseño de las ganancias del diferenciador requiere solamente del conocimiento del parámetro L , el cual tiene que satisfacer solamente $|\dot{f}_0| \leq L$. Los términos de alto orden, $|\sigma_0|^{\frac{3}{2}} \text{sign}(\sigma_0)$ y $|\sigma_0|^2 \text{sign}(\sigma_0)$ son introducidos mejorar las propiedades de convergencia del diferenciador. De hecho, la convergencia es uniforme con respecto a las condiciones iniciales en el diferenciador [citarme]. Respectivamente, z_0 y z_1 son las estimaciones de $f_0(t)$ y $\dot{f}_0(t)$. Las estimaciones son exactas en ausencia de ruido si $z_0 = f_0(t)$ y $\dot{z}_0 = \dot{f}_0(t)$ (Levant, 2003). Definiendo $\sigma_1 = z_1 - \varsigma_1$ como el error de estimación entre la salida

del diferenciador y la primera derivada de la señal base, la dinámica del error de diferenciación esta dada por

$$\dot{\sigma}_0 = -k_1\phi_1(\sigma_0) + \sigma_1, \dot{\sigma}_1 = -k_2\phi_2(\sigma_0) - \ddot{f}_0(t), \quad (3)$$

donde $|\ddot{f}_0(t)|$ satisface $|\ddot{f}_0(t)| \leq L$, y $\sigma_0 = 0$ y $\sigma_1 = 0$ se establecen en tiempo finito. Las soluciones del sistema (2) son soluciones en el sentido de Filippov (Filippov, 1988).

Definición 1: Un sistema es *uniformemente convergente* con respecto a las condiciones iniciales si el tiempo de convergencia de cualquier trayectoria del sistema a un conjunto compacto arbitrario, que contiene el punto de equilibrio en su interior, es acotado por una constante e independiente de las condiciones iniciales.

Definición 2: Un sistema es *uniformemente convergente en tiempo finito* si converge al punto de equilibrio en *tiempo finito* y el tiempo de convergencia de cualquier trayectoria del sistema al punto de equilibrio esta acotado por una constante que es independiente de las condiciones iniciales.

Definición 3: Un sistema *exactamente convergente* si todas sus trayectorias convergen al origen en tiempo finito en presencia de perturbaciones que no se desvanecen en el origen.

Definición 4: Un sistema es *exacta y uniformemente convergente* con respecto a las condiciones iniciales si es *exactamente convergente* y el tiempo de convergencia de cualquier trayectoria del sistema al origen esta acotado por una constante que independiente de las condiciones iniciales.

Teorema 1: Suponga que $|\dot{f}_0(t)| \leq L$. Entonces, el error de diferenciación (3) es *exacta y uniformemente convergente* asegurando la estimación de f_0 y \dot{f}_0 si las ganancias k_1 y k_2 son seleccionadas de tal forma que ambas desigualdades $k_1^2(k_2 - \frac{1}{4}k_1^2) > \rho^2$ y $k_2 > \rho$ se satisfagan simultáneamente.

II-A. Precisión del Diferenciador

Cuando la estimación de la derivada es cercana a la derivada de la señal de entrada, el DREU se aproxima al diferenciador de Levant. Entonces, el DREU tiene la misma precisión que el diferenciador de Levant con respecto a ruidos y mediciones discretas de $f_0(t)$. Si la señal de entrada tiene la forma $f(t) = f_0(t) + v(t)$ y $v(t)$ es una función Lebesgue-medible con magnitud $|v(t)| \leq \nu$, las desigualdades $|z_0 - f_0(t)| < \eta_0\nu$, $|z_1 - \dot{f}_0(t)| < \eta_1\nu^{1/2}$ son establecidas con constantes positivas η_0, η_1 . Si $f_0(t)$ es muestreada con intervalos de muestreo constante $\tau > 0$, las desigualdades $|z_0 - f_0(t)| < \varrho_0\tau^2$, $|z_1 - \dot{f}_0(t)| < \varrho_1\tau$ son establecidas con constantes positivas ϱ_0, ϱ_1 , (Levant, 2003).

III. PRUEBA DEL TEOREMA 1

Considere $\ddot{f}_0(t) = 0, \forall t \geq 0$, la ec.(3) se reduce a

$$\dot{\sigma}_0 = -k_1\phi_1(\sigma_0) + \sigma_1, \dot{\sigma}_1 = -k_2\phi_2(\sigma_0) \quad (4)$$

Teorema 2: Para cualquier $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$ el sistema (4) es *uniformemente convergente en tiempo finito*.

Para probar el teorema anterior, dos funciones de Lyapunov son propuestas. La primera prueba la convergencia global y en *tiempo finito* de cualquier trayectoria de (4) al origen, pero no la uniformidad con respecto a condiciones iniciales (Moreno, 2008), (Moreno, 2009). La segunda función de Lyapunov se propone para mostrar que (4) es *uniformemente convergente*. Ambas funciones prueban que el sistema (4) es exacta y uniformemente convergente.

III-A. Convergencia en Tiempo Finito

Se propone la siguiente función de Lyapunov global fuerte para (4)

$$V_1(\sigma) = \zeta^T P \zeta, \quad (5)$$

donde el vector $\zeta^T = [\phi_1(\sigma_0), \sigma_1]$, y $P = P^T$ es una matriz simétrica positiva definida, solución de la Ecuación Algebraica de Lyapunov (EAL)

$$A^T P + P A = -Q, \quad A = \begin{bmatrix} -k_1 & 1 \\ -k_2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6)$$

con $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$, la matriz A es Hurwitz y $Q = Q^T > 0$ es una matriz simétrica positiva definida arbitraria.

Proposición 1: Para cada $Q > 0$, la función (5) es una función de Lyapunov global fuerte para el sistema (4), donde $P = P^T > 0$ es la única matriz simétrica positiva definida solución de la EAL (6). Además, la derivada \dot{V}_1 de la función de Lyapunov tomada a lo largo de las trayectorias del sistema satisface la desigualdad diferencial

$$\dot{V}_1 \leq -\gamma_1(Q, \mu_1) V_1^{\frac{1}{2}}(\sigma) - \gamma_2(Q, \mu_2) |\sigma_0|^{\frac{1}{2}} V_1(\sigma), \quad (7)$$

donde

$$\gamma_1(Q, \mu_1) \triangleq \mu_1^2 \frac{\lambda_{\min}\{Q\}}{2\lambda_{\max}^{\frac{1}{2}}\{P\}}, \quad \gamma_2(Q, \mu_2) \triangleq \mu_2 \frac{3\lambda_{\min}\{Q\}}{2\lambda_{\max}\{P\}}$$

son escalares que dependen de la selección de μ_1, μ_2 y de la matriz Q . Las trayectorias de (4) comenzadas en $\sigma^0 \in \mathbb{R}^2$ convergen a cero en tiempo finito t_1 menor a

$$t_1 = \frac{2}{\gamma_1(Q, \mu_1)} V_1^{\frac{1}{2}}(\sigma^0) \quad \text{if } \mu_1 > 0$$

Demostración: Apéndice A. ■

III-B. Función de Lyapunov homogénea

Para establecer la *convergencia uniforme* de (4) se propone una segunda función de Lyapunov.

Proposición 2: Para $\delta > 0$ suficientemente grande, la función continua

$$V_2(\sigma) = \frac{\delta}{3} k_2 |\sigma_0|^3 - \sigma_0 |\sigma_1|^{\frac{4}{3}} \text{sign}(\sigma_1) + \frac{\delta}{2} |\sigma_1|^2, \quad (8)$$

es una función de Lyapunov fuerte para el sistema (4). Además

$$\dot{V}_2(\sigma) \leq -C_1 \left(\frac{V_2(\sigma)}{2C_4} \right)^{\frac{7}{6}}$$

Más aun, el sistema (4) es *uniformemente convergente* y el tiempo de convergencia uniforme a una bola de radio ε centrada en el origen esta dado por

$$t(\varepsilon) = \frac{12}{C_1} \left(\frac{2^7 C_4^7}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{6}} \quad \text{for any } \varepsilon > 0,$$

donde C_1, C_4 son constantes positivas independientes de las condiciones iniciales (c.i).

Demostración: Apéndice B. ■

La derivada de $V_2(\sigma)$ muestra que las trayectorias de (4) convergen asintóticamente a cero y que el sistema (4) es uniformemente convergente. El Teorema 2 es una simple consecuencia de la Proposiciones 1 y 2. El análisis de (4) con ambas funciones de Lyapunov muestra que la convergencia en tiempo finito de debe a los términos de bajo orden, que son mas fuertes comparados con los términos de alto orden en una vecindad del origen. Por otro lado, los términos de alto grado son mas fuertes lejos del origen que los de bajo orden, y son responsables de una velocidad de convergencia rápida y de la propiedad de convergencia uniforme. El análisis para la ecuación dinámica (3) se hace en manera similar. Utilizando la función (5) para (3), donde $P = P^T > 0$ ahora es solución de la siguiente Desigualdad Matricial Lineal (DML)

$$\begin{bmatrix} A^T P + P A + \epsilon I + (2L/\mu_1^2)^2 C^T C & P B \\ B^T P & -1 \end{bmatrix} \leq 0, \quad (9)$$

donde $C = [1 \ 0], B^T = [0 \ 1]$.

Proposición 3: Seleccionando las ganancias k_1 y k_2 se de tal forma que $k_2 > \rho$ y $k_1^2(k_2 - \frac{1}{4}k_1^2) > \rho^2$ se satisfagan simultáneamente, la DML (9) siempre se satisface. Por lo tanto, la función (5) es una función de Lyapunov fuerte global para el sistema (4) que garantiza la convergencia exacta de σ al origen. Además, la derivada \dot{V}_1 de la función de Lyapunov tomada a lo largo de las trayectorias del sistema (3) satisface la desigualdad

$$\dot{V}_1 \leq -\gamma_1(P, \epsilon) V_1^{\frac{1}{2}}(\sigma) - \gamma_2(\epsilon) |\sigma_0|^{\frac{1}{2}} V_1(\sigma), \quad (10)$$

donde

$$\gamma_1(P, \epsilon) \triangleq \mu_1^2 \frac{\epsilon}{2\lambda_{\max}^{1/2}\{P\}}, \quad \gamma_2(\epsilon) \triangleq \mu_2 \frac{3\epsilon}{2\lambda_{\max}\{P\}}$$

son escalares positivos y las trayectorias de (4) comenzadas en $\sigma^0 \in \mathbb{R}^2$ convergen a cero en tiempo finito T_1 menor a

$$T_1 \leq \frac{4\lambda_{\max}^{1/2}\{P\}}{\mu_1^2 \epsilon} V_1^{1/2}(\sigma^0) \quad (11)$$

aun en presencia de perturbaciones acotadas por L .

Demostración: Apéndice C. ■

Proposición 4: La función continua (8) es una función de Lyapunov robusta para (3). Más aun, el sistema (3) es *uniformemente convergente* bajo perturbaciones acotadas y el tiempo de convergencia uniforme a una bola de radio ε centrada en el origen esta dado por

$$T_2(\varepsilon) = \frac{12}{C_1} \left(\frac{2^7 C_4^7}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{6}} \quad \text{for any } \varepsilon > 0, \quad (12)$$

Demostración: Apéndice D. ■

La Proposiciones 3 y 4 garantizan que (3) es exacta y uniformemente convergente cuando \dot{f}_0 es acotada.

IV. ESTIMACIÓN DEL TIEMPO DE CONVERGENCIA

El tiempo de convergencia puede ser estimado usando las dos funciones de Lyapunov. Primero, hay que calcular el tiempo de convergencia T_2 a la vecindad de radio ε con la función $V_2(\sigma)$, con la función $V_1(\sigma)$ se encuentra el conjunto invariante que contenga a la vecindad de radio ε . T_1 es el tiempo de convergencia de la frontera del conjunto invariante al origen. La suma de T_1 y T_2 es un estimado del tiempo de convergencia del DREU. El algoritmo para estimar el tiempo de convergencia T del DREU es el siguiente

- Seleccionar las ganancias como en el Teorema 4 y calcular $C_i > 0, i = 1, \dots, 4$ con $\delta > 0$.
- Calcular ε como en la Proposición (4). El tiempo de convergencia al vecindad de radio ε está dado por (12).
- Elegir $\varepsilon_2 > \varepsilon$ y calcular el conjunto $\Gamma_2 = \{(\sigma_0, \sigma_1) : |V_2(\sigma_0, \sigma_1) \leq \varepsilon_2\}$.
- Encontrar el conjunto Γ_1 tal que $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$ y $\Gamma_2 = \{(\sigma_0, \sigma_1) : V_1(\sigma_0, \sigma_1) \leq \varepsilon_1\}$. Entonces, el tiempo de convergencia de la frontera del conjunto Γ al origen se calcula como $T_1 = \frac{4\lambda_{\max}^{1/2}\{P\}}{\mu_1^2 \varepsilon} \varepsilon_1^{1/2}$.
- $T = T_1 + T_2$, es un estimado del tiempo de convergencia del DREU.

V. EJEMPLO DE SIMULACIÓN

Se compara el diferenciador propuesto con el diferenciador de Levant (Levant, 1993). Para simulación, $\mu_1 = \mu_2 = 1, L = 2,5, k_1^2 = 2k_2$ y $k_2 = 6$ y dos condiciones iniciales para los diferenciadores $z(0) = 0$ y $z(0) = 10$ fueron utilizadas. La señales de entrada son: $f(t) = 5t + \sin t + 0,01 \cos 10t$ y $f(t) = 5t + \sin t + 0,001 \cos 30t$ (tomadas de (Levant, 1993)). Los resultados que se obtienen se muestran en la Fig. 1. Ambos diferenciadores convergen

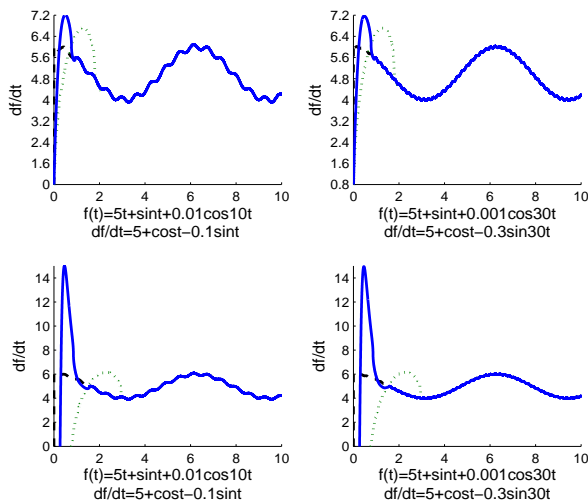


Figura 1. Gráficas comparativas entre el DREU (azul) y el diferenciador de Levant (verde)

exactamente. Sin embargo, como se muestra en la Fig. 2,

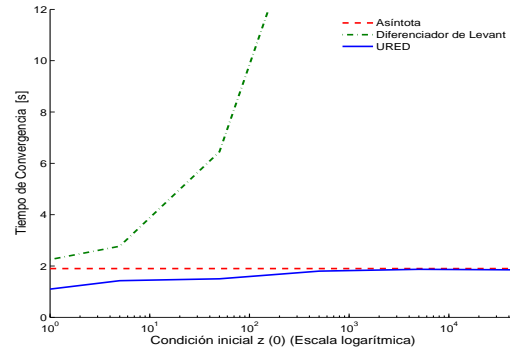


Figura 2. Tiempo de convergencia cuando las condiciones iniciales crecen en ambos diferenciadores, con $f(t) = 5t + \sin t + 0,01 \cos 10t$ como señal de entrada.

el tiempo de convergencia diferenciador de Levant crece en forma no acotada, cuando también la norma de la condición inicial crece. Mientras, el tiempo de convergencia del DREU está acotado por una constante, aun en presencia de ruido.

VI. CONCLUSIONES

Un diferenciador robusto exacto y uniforme con respecto a las condiciones iniciales es propuesto por primera vez. Esencialmente se basa en una modificación del diferenciador (Levant, 1993). Términos de alto orden son agregados para mejorar las propiedades de convergencia del diferenciador. Los términos de alto orden son responsables de la convergencia uniforme y los términos de bajo orden garantizan la convergencia exacta al origen. En análisis de estabilidad fue dividido en dos partes. Primero, una función de Lyapunov fue propuesta para probar la convergencia exacta. Después, otra función de Lyapunov fue propuesta para probar la convergencia uniforme a una vecindad arbitraria del origen.

VII. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo financiero del CONACyT (Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología), grant 56819, Project 51244 Programa de Apoyo a Proyectos de Investigación e Innovación Tecnológica (PAPIIT) UNAM, grant IN117610, y FONCICYT project 93302.

REFERENCIAS

Atassi, A.N., Khalil, H.K., Separation results for the stabilization of nonlinear systems using different high-gain observer designs, *Systems & Control Letters*, vol. 39, pp. 183-191, 2000.

Bacciotti, A. and Rosier, L. (2005). *Lyapunov functions and stability in control theory*. 2nd ed. New York, Springer-Verlag.

Bartolini, G., Pisano, A., Usai, E., First and second derivative estimation by sliding mode technique. *Journal of Signal Processing*, vol. 4, no.2, 167-176, 2000.

Bejarano, J. F., Fridman, L., Poznyak, A. Exact state estimation for linear systems with unknown inputs based on hierarchical super-twisting algorithm, *International Journal on Robust and Nonlinear Control*, 17(18):2007, pp. 1734-1753.

- Dávila, J., Fridman, L. and Levant, A. (2005) Second-Order Sliding-Modes Observer for Mechanical Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 50, No. 11, pp. 1785–1789.
- Filippov, A.F. (1988). *Differential equations with discontinuous righthand side*. Kluwer. Dordrecht, The Netherlands. 304 p.
- Hardy, G.H.; Littlewood, J.E.; Pólya, G. *Inequalities*. London, Cambridge University Press, 1951.
- Khalil, H.K. (2002). *Nonlinear Systems*. Third ed. Prentice–Hall. Upsaddle River, New Jersey. 750 p.
- Kumar, B.Roy, S.C.D., Design of digital differentiators for low frequencies. *Proc. IEEE*, vol. 76, 287–289, 1988.
- Levant, A. (1993) Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control. *International Journal of Control*, Vol. 58, No. 6, pp. 1247–1263.
- Levant, A. (1998) Robust Exact Differentiation via Sliding Mode Technique. *Automatica*, Vol. 34, No. 3, pp. 379–384.
- Levant, A. (2003). Higher-order sliding modes, differentiation and output-feedback control, *International Journal of Control*, 76 (9/10), 924–941.
- Moreno, J.A., Osorio, M. (2008) A Lyapunov approach to second-order sliding mode controllers and observers. *47th IEEE Conference on Decision and Control*. CDC 2008, pp.2856-2861
- Moreno, J.A., (2009) A Linear Framework for the Robust Stability Analysis of a Generalized Super-Twisting Algorithm. *6th International Conference on Electrical Engineering*. CCE 2009, pp.12-17.
- Orlov, Y. (2009) *Discontinuous Control*. Springer Verlag: Berlin.
- Rabiner, L.R., Steiglitz, K., The design of wide-band recursive and nonrecursive digital differentiators, *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, AU vol. 18, 204–209, 1970.
- Pisano, A., Usai, E., Globally convergent real-time differentiation via second order sliding modes, *International Journal of Systems Science*. Vol. 38, No. 10, October 2007, 833844.
- Polyakov, A., Poznyak, A., *Reaching Time Estimation for “Super-Twisting” Second Order Sliding Mode Controller via Lyapunov Function Designing*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 54, no. 8, pp.1951-1955. August 2009.

APÉNDICE A

El término $\phi_2(\sigma_0) = \phi'_1(\sigma_0)\phi_1(\sigma_0)$, donde $\phi'_1(\sigma_0) = \left(\frac{-\mu_1}{2|\sigma_0|^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{2}\mu_2|\sigma_0|^{\frac{1}{2}}\right)$. Desde que

$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} \phi'_1(\sigma_0)\{-k_1\phi_1(\sigma_0) + \sigma_1\} \\ -k_2\phi_2(\sigma_0) \end{bmatrix} = \phi'_1(\sigma_0)A\zeta,$$

con $\zeta^T = [\phi_1(\sigma_0), \sigma_1]$ y A como en (6). La derivada de $V_1(\sigma)$ es

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(\sigma) &= \dot{\zeta}^T P \zeta + \zeta^T P \dot{\zeta} = \phi'_1(\sigma_0) \zeta^T (A^T P + P A) \zeta \\ &= -\phi'_1(\sigma_0) \zeta^T Q \zeta \leq -\lambda_{\min}\{Q\} \phi'_1(\sigma_0) \|\zeta\|_2^2 \\ &\leq -\mu_1^2 \frac{\lambda_{\min}\{Q\}}{2\lambda_{\max}^{\frac{1}{2}}\{P\}} V_1^{\frac{1}{2}}(\sigma) - \mu_2 \frac{3\lambda_{\min}\{Q\}}{2\lambda_{\max}\{P\}} |\sigma_0|^{\frac{1}{2}} V_1(\sigma). \end{aligned}$$

donde Q satisface la EAL(6), muestra que $V(\sigma)$ es una función fuerte de Lyapunov y que las trayectorias convergen en tiempo finito. Las desigualdades anteriores han sido derivadas aplicando la desigualdad $\lambda_{\min}\{P\} \|\zeta\|_2^2 \leq \zeta^T P \zeta \leq \lambda_{\max}\{P\} \|\zeta\|_2^2$, donde $\|\zeta\|_2^2 = \phi_1^2(\sigma_0) + \sigma_1^2 = \mu_1^2 |\sigma_0| + 2\mu_1\mu_2 |\sigma_0|^2 + \mu_2^2 |\sigma_0|^3 + \sigma_1^2$ es la norma Euclideana de ζ , y de la desigualdad $\mu_1 |\sigma_0|^{\frac{1}{2}} \leq \|\zeta\|_2$. De (7) y del principio de comparación (Khalil, 2002), $V(\sigma(t)) \leq v(t)$ cuando $V(\sigma(0)) \leq v_0$. Entonces, la solución de la ecuación diferencial $\dot{v} = -\gamma_1 v^{\frac{1}{2}} - \gamma_2 |\sigma_0|^{\frac{1}{2}} v$, $v(0) = v_0 \geq 0$ esta dada por

$$v(t) = \left(v_0^{\frac{1}{2}} - \frac{\gamma_1}{2} t\right)^2 \text{ if } \gamma_1 > 0, \gamma_2 = 0 \quad (13)$$

Por lo tanto, $\sigma(t)$ converge a cero en tiempo finito (cuando $\gamma_1 > 0$) en un tiempo (12).

APÉNDICE B

La norma homogénea se define como

$$\|\sigma\|_{r,p} = \left(\sum_{i=1}^n |\sigma_i|^{\frac{p}{r_i}}\right)^{\frac{1}{p}}, \forall \sigma \in \mathbb{R}^n$$

donde $p \geq 1$ y r_i son los pesos de σ_i . Con una selección especial de los pesos, es posible escribir $\dot{V}_2(\sigma)$ en términos de la norma homogénea. De la desigualdad de Jensen [10, Thm. 19, Section 2.10]

$$(|x_1|^s + |x_2|^s)^{\frac{1}{s}} \geq (|x_1|^r + |x_2|^r)^{\frac{1}{r}}, \forall x \in \mathbb{R}^2, 0 < r < s,$$

se tiene $(|\sigma_0|^3 + |\sigma_1|^2)^{\frac{7}{6}} = (|\sigma_0|^{\frac{7}{2}})^{\frac{6}{7}} + (|\sigma_1|^{\frac{7}{3}})^{\frac{6}{7}})^{\frac{7}{6}} \geq (|\sigma_0|^{\frac{7}{2}} + |\sigma_1|^{\frac{7}{3}})^{\frac{7}{6}} = \|\sigma\|_{\frac{7}{r},p}^{\frac{7}{6}}$. Por lo tanto, si $r_1 = 1$, $r_2 = \frac{3}{2}$ y $p = \frac{7}{2}$, $|\sigma_0|^{\frac{7}{2}} + |\sigma_1|^{\frac{7}{3}} = \|\sigma\|_{\frac{7}{r},p}^{\frac{7}{2}}$, $\|\sigma\|_{\frac{5}{r},p}^{\frac{5}{2}} \leq |\sigma_0|^{\frac{5}{2}} + |\sigma_1|^{\frac{5}{3}} \leq 2\|\sigma\|_{\frac{5}{r},p}^{\frac{5}{2}}$, $\|\sigma\|_{\frac{3}{r},p}^{\frac{3}{2}} \leq |\sigma_0|^{\frac{3}{2}} + |\sigma_1| \leq 2\|\sigma\|_{\frac{3}{r},p}^{\frac{3}{2}}$ y $\|\sigma\|_{\frac{3}{r},p}^3 \leq |\sigma_0|^3 + |\sigma_1|^2 \leq 2\|\sigma\|_{\frac{3}{r},p}^3$. Finalmente de la desigualdad clásica de Young

Lema 1: (Moreno, 2009) Para cada número real $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $p > 1$, $q > 1$, con $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ la siguiente desigualdad se satisface

$$ab \leq c^p \frac{a^p}{p} + c^{-q} \frac{b^q}{q}.$$

Primero se demuestra que $V_2(\sigma)$ es positiva definida. Del Lema 1

$$|\sigma_0| |\sigma_1|^{\frac{4}{3}} \leq \frac{\gamma_3^p}{p} |\sigma_0|^3 + \frac{3\gamma_3^q}{q} |\sigma_1|^2, p = 3, q = \frac{3}{2}, \forall \gamma_3 > 0,$$

$$\text{y de } V_2(\sigma) = \frac{\delta}{3} \tilde{k}_2 |\sigma_0|^3 - \sigma_0 |\sigma_1|^{\frac{4}{3}} \text{sign}(\sigma_1) + \frac{\delta}{2} |\sigma_1|^2,$$

$$V_2(\sigma) \geq \left(\frac{\delta}{3} \tilde{k}_2 - \frac{\gamma_3^3}{3}\right) |\sigma_0|^3 + \left(\frac{\delta}{2} - \frac{2}{3} \gamma_3^{-\frac{3}{2}}\right) |\sigma_1|^2,$$

$\forall \sigma$ y $V_2(\sigma) > 0$ si $\delta > \max\left\{\frac{\gamma_3^3}{3} / \tilde{k}_2, \frac{4}{3} \gamma_3^{-\frac{3}{2}}\right\}$. Ahora se demostrará que $V_2(\sigma)$ es negativa fuera de un conjunto compacto que contiene el origen. Tomando la derivada de $V_2(\sigma)$ a lo largo de las trayectorias de (4) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(\sigma) &= -k_1 \delta \tilde{k}_2 \mu_1 |\sigma_0|^{\frac{5}{2}} + k_1 \mu_1 |\sigma_0|^{\frac{1}{2}} \text{sign}(\sigma_0) |\sigma_1|^{\frac{4}{3}} \text{sign}(\sigma_1) \\ &\quad + \frac{2}{3} \mu_2^2 k_2 |\sigma_0| |\sigma_1|^{\frac{1}{3}} + \frac{8}{3} k_2 \mu_1 \mu_2 \sigma_0^2 |\sigma_1|^{\frac{1}{3}} - |\sigma_1|^{\frac{7}{3}} \\ &\quad - \frac{\mu_1^2}{2} \delta k_2 \text{sign}(\sigma_0) \sigma_1 - 2\delta k_2 \mu_1 \mu_2 \sigma_0 \sigma_1 - \delta \tilde{k}_1 \tilde{k}_2 |\sigma_0|^{\frac{7}{2}} \\ &\quad + \tilde{k}_1 |\sigma_0|^{\frac{3}{2}} \text{sign}(\sigma_0) |\sigma_1|^{\frac{4}{3}} \text{sign}(\sigma_1) + \frac{4}{3} \tilde{k}_2 |\sigma_0|^3 |\sigma_1|^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Usando las siguientes desigualdades derivadas del Lema 1

$$|\sigma_0|^{\frac{3}{2}} |\sigma_1|^{\frac{4}{3}} \leq \frac{\gamma_1^p}{p} |\sigma_0|^{\frac{7}{2}} + \frac{\gamma_1^{-q}}{q} |\sigma_1|^{\frac{7}{3}}, p = \frac{7}{3}, q = \frac{7}{4}, \forall \gamma_1 > 0,$$

$$|\sigma_0|^3 |\sigma_1|^{\frac{1}{3}} \leq \frac{\gamma_2^p}{p} |\sigma_0|^{\frac{7}{2}} + \frac{\gamma_2^{-q}}{q} |\sigma_1|^{\frac{7}{3}}, p = \frac{7}{6}, q = 7, \forall \gamma_2 > 0,$$

$$|\sigma_0|^{\frac{1}{2}} |\sigma_1|^{\frac{4}{3}} \leq \frac{\gamma_4^p}{p} |\sigma_0|^{\frac{5}{2}} + \frac{\gamma_4^{-q}}{q} |\sigma_1|^{\frac{5}{3}}, p = 5, q = \frac{5}{4}, \forall \gamma_4 > 0,$$

$$\begin{aligned}
 |\sigma_0| |\sigma_1|^{\frac{1}{3}} &\leq \frac{\gamma_5^p}{p} |\sigma_0|^{\frac{3}{2}} + \frac{\gamma_5^{-q}}{q} |\sigma_1|, p = \frac{3}{2}, q = 3, \forall \gamma_5 > 0, \\
 |\sigma_0|^2 |\sigma_1|^{\frac{1}{3}} &\leq \frac{\gamma_6^p}{p} |\sigma_0|^{\frac{5}{3}} + \frac{\gamma_6^{-q}}{q} |\sigma_1|^{\frac{5}{3}}, p = \frac{5}{4}, q = 5, \forall \gamma_6 > 0, \\
 |\sigma_0| |\sigma_1| &\leq \frac{\gamma_7^p}{p} |\sigma_0|^{\frac{5}{2}} + \frac{\gamma_7^{-q}}{q} |\sigma_1|^{\frac{5}{3}}, p = \frac{5}{2}, q = \frac{5}{3}, \forall \gamma_7 > 0,
 \end{aligned}$$

la función $V_2(x)$ cumple

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2(\sigma) &\leq -\alpha_1 |\sigma_0|^{\frac{7}{2}} - \alpha_2 |\sigma_1|^{\frac{7}{3}} - \beta_1 |\sigma_0|^{\frac{5}{2}} + \beta_2 |\sigma_1|^{\frac{5}{3}} \\
 &\quad + \beta_3 |\sigma_0|^{\frac{3}{2}} + \beta_4 |\sigma_1|
 \end{aligned}$$

donde $\alpha_1 = \delta k_1 \tilde{k}_2 - \frac{3\gamma_1^{\frac{7}{3}}}{7} \tilde{k}_1 - \frac{8\gamma_2^{\frac{7}{6}}}{7} \tilde{k}_2$

$$\alpha_2 = 1 - \frac{4\gamma_1^{-\frac{7}{4}}}{7} \tilde{k}_1 - \frac{4\gamma_2^{-7}}{21} \tilde{k}_2$$

$$\beta_1 = k_1 \delta \tilde{k}_2 \mu_1 - k_1 \mu_1 \frac{\gamma_4^5}{5} - \frac{8}{3} k_2 \mu_1 \mu_2 \frac{4\gamma_6^{\frac{5}{2}}}{5} - 2\delta k_2 \mu_1 \mu_2 \frac{2\gamma_7^{\frac{5}{2}}}{5}$$

$$\beta_2 = k_1 \mu_1 \frac{4\gamma_4^{-\frac{5}{4}}}{5} + \frac{8}{3} k_2 \mu_1 \mu_2 \frac{\gamma_6^{-5}}{5} + 2\delta k_2 \mu_1 \mu_2 \frac{3\gamma_7^{-\frac{5}{3}}}{5}$$

$$\beta_3 = \frac{4}{9} \mu_1^2 k_2 \gamma_5^{\frac{3}{2}} \text{ y } \beta_4 = \frac{2}{9} \mu_1^2 k_2 \gamma_5^{-3} + \frac{\mu_1^2}{2} \delta k_2. \text{ Desde que } C_3 \|\sigma\|_{r,p}^3 \leq V_2(\sigma) \leq 2C_4 \|\sigma\|_{r,p}^3, \text{ donde}$$

$$C_3 = \min \left\{ \left(\frac{\delta \tilde{k}_2}{3} - \frac{\gamma_3^{\frac{3}{2}}}{3} \right), \left(\frac{\delta}{2} - \frac{2}{3} \gamma_3^{-\frac{3}{2}} \right) \right\},$$

$$C_4 = \max \left\{ \left(\frac{\delta \tilde{k}_2}{3} + \frac{\gamma_3^{\frac{3}{2}}}{3} \right), \left(\frac{\delta}{2} + \frac{2}{3} \gamma_3^{-\frac{3}{2}} \right) \right\},$$

la derivada $\dot{V}_2(\sigma)$ satisface

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2(\sigma) &\leq -\frac{C_1}{2} \|\sigma\|_{r,p}^{\frac{7}{2}} \\
 &\quad - \frac{C_1}{2} \|\sigma\|_{r,p}^{\frac{3}{2}} \left(\|\sigma\|_{r,p}^2 - 2\frac{\beta_2}{C_1} \|\sigma\|_{r,p} - 2\frac{C_2}{C_1} \right)
 \end{aligned}$$

donde $C_1 = \min \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $C_2 = \max \{\beta_3, \beta_4\}$. Además

$$\dot{V}_2(\sigma) \leq -\frac{C_1}{2} \|\sigma\|_{r,p}^{\frac{7}{2}} \leq -\frac{C_1}{2} \left(\frac{V_2(\sigma)}{2C_4} \right)^{\frac{7}{2}}, \forall \sigma \in \Gamma \quad (14)$$

donde $\Gamma = \{\sigma \in R^2 | C_1 \|\sigma\|_{r,p} \geq \beta_2 + \sqrt{\beta_2^2 + 2C_2 C_1}\}$. Entonces $\dot{V}_2(\sigma) < 0$ (fuera de Γ) si

$$\delta > \frac{3\gamma_1^{\frac{7}{3}}}{7\tilde{k}_2} + \frac{8\gamma_2^{\frac{7}{6}}}{7\tilde{k}_1}, 1 > \frac{4\gamma_1^{-\frac{7}{4}}}{7} \tilde{k}_1 + \frac{4\gamma_2^{-7}}{21} \tilde{k}_2.$$

Para toda $\tilde{k}_1 > 0$, $\tilde{k}_2 > 0$ ambas desigualdades pueden ser siempre satisfechas seleccionando $(\delta, \gamma_1, \gamma_2)$ apropiadamente. La solución de la ecuación diferencial esta dada por

$$v(t) = \left(\frac{C_1}{(2C_4)^{\frac{7}{6}} 12} t + \frac{1}{v_0^{\frac{1}{6}}} \right)^{-6} \quad (15)$$

La cual se deduce de (14) y del principio de comparación (Khalil, 2002) que $V_2(\sigma(t)) \leq v(t)$ cuando $V(\sigma(0)) \leq v_0$.

El tiempo $T(\varepsilon, v_0)$ en ir de $V_2(\sigma(t)) = v_0$ a $V_2(\sigma(t)) = \varepsilon$, $v_0 > \varepsilon > 0$, satisface

$$T(\varepsilon, v_0) = \frac{12(2C_4)^{\frac{7}{6}}}{C_1} \left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{6}}} - \frac{1}{v_0^{\frac{1}{6}}} \right) \quad (16)$$

Note que $T(\varepsilon) = \lim_{v_0 \rightarrow \infty} T(\varepsilon, v_0) = \frac{6(2C_4)^{\frac{7}{6}}}{C_1} \left(\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{6}}} \right)$ es constante. Esto muestra que las soluciones del sistema (4) llegan al conjunto $(\sigma | V_2(\sigma) \leq \varepsilon)$ en un tiempo menor que $T(\varepsilon)$, independientemente de las condiciones iniciales.

APÉNDICE C

Como el sistema (3) puede escribirse como

$$\dot{\zeta} = \begin{bmatrix} \phi_1'(\sigma_0) \{-k_1 \phi_1(\sigma_0) + \sigma_1\} \\ -k_2 \phi_2(\sigma_0) - \dot{f}_0(t) \end{bmatrix} = \phi_1'(\sigma_0) (A\zeta - B\rho(t, \zeta_1)),$$

donde $B^T = [0 \ 1]$, $\zeta_1 = \phi_1(\sigma_0)$ y

$$\rho(t, \zeta_1) = \frac{\dot{f}_0(t)}{\phi_1^{prime}} = \frac{2\dot{f}_0(t) \text{sign}(\sigma_0)}{(\mu_1 + 3\mu_2|\sigma_0|)(\mu_1 + \mu_2|\sigma_0|)} \zeta_1.$$

$|\dot{f}_0(t)| \leq L$ implica $|\rho(t, \zeta_1)| \leq 2L|\zeta_1|/\mu_1^2$, o equivalentemente

$$\begin{aligned}
 \omega_2(\rho, \zeta) &= -\rho^2(t, \zeta) + \left(\frac{2L}{\mu_1^2} \right)^2 \zeta_1^2 \\
 &= \begin{bmatrix} \zeta \\ \rho \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \left(\frac{2L}{\mu_1^2} \right)^2 C^T C & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \rho \end{bmatrix} \geq 0
 \end{aligned}$$

donde $C = [0 \ 1]$. La derivada de $V_1(\sigma)$ es

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_1(\sigma) &= \phi_1' \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho}_2 \end{bmatrix} \\
 &\leq \phi_1' \left\{ \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho}_2 \end{bmatrix} + \omega_2(\tilde{\rho}_2, \zeta) \right\} \\
 &= \phi_1' \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} A^T P + PA + R & PB \\ B^T P & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta \\ \tilde{\rho}_2 \end{bmatrix} \leq -\phi_1' \epsilon \|\zeta\|_2^2 \\
 &\leq -\frac{\mu_1^2 \epsilon}{2\lambda_{\max}^{1/2} \{P\}} V_1(\sigma) - \frac{3\mu_2 \epsilon}{2\lambda_{\max} \{P\}} |\sigma_0|^{1/2} V_1(\sigma)
 \end{aligned}$$

asumiendo que (9) se satisface, lo cual solo es posible si $k_2 > \rho$ y $k_1^2(k_2 - \frac{1}{4}k_1^2) > \rho^2$ se satisface simultáneamente (Moreno, 2009). La solución de la ecuación diferencial $\dot{v} = -\gamma_1 v^{\frac{1}{2}} - \gamma_2 |\sigma_0|^{\frac{1}{2}} v$, $v(0) = v_0 \geq 0$ satisface (13), con $\gamma_1 = \mu_1 \epsilon / 2\lambda_{\max}^{1/2} \{P\}$. Por lo tanto, $\sigma(t)$ converge robustamente a cero en tiempo finito (cuando $\gamma_1 > 0$) en un tiempo (11).

APÉNDICE D

Tomando la derivada de $V_2(\sigma)$ a lo largo de las trayectorias de (3) y considerando $\dot{f}_0 \leq L$

$$\begin{aligned}
 \dot{V}_2(\sigma) &\leq -\alpha_1 |\tilde{\sigma}_1|^{\frac{7}{2}} - \alpha_2 |\sigma_1|^{\frac{7}{3}} - \beta_1 |\sigma_1|^{\frac{5}{2}} + \beta_2 |\sigma_1|^{\frac{5}{3}} \\
 &\quad + \beta_3 |\sigma_0|^{\frac{3}{2}} + \beta_4 |\sigma_1|
 \end{aligned}$$

donde $\beta_3 = \frac{4}{9} \mu_1^2 k_2 \gamma_5^{\frac{3}{2}} + \frac{8}{9} L \gamma_5^{\frac{3}{2}}$ y $\beta_4 = \frac{2}{9} \mu_1^2 k_2 \gamma_5^{-3} + \frac{\mu_1^2}{2} \delta k_2 + \frac{4}{9} L \gamma_5^{-3} + \delta L$. La derivada \dot{V}_2 satisface (14) y (16) aun en presencia de perturbaciones.